

基于非线性井阻的饱和软弱土无砂增压式真空预压分析方法

倪睿思¹, 肖世国¹, 吴兵², 梁瑶²

(1. 西南交通大学 土木工程学院, 四川 成都 610031; 2. 四川省交通勘察设计研究院有限公司, 四川 成都 610017)

摘要: 针对无砂增压式真空预压的特点, 充分考虑排水板井阻的时空非线性变化特性、增压荷载与增压管长度的关系等要素, 建立了以增压管为中心的非理想井径向渗流计算单元模型, 推导出非齐次偏微分控制方程。基于 Sturm-Liouville 本征理论, 利用本征函数展开法求解得到超静孔压的解析解, 并针对增压常载、后期增压常载及后期间歇式增压等 3 种典型实际增压模式, 分别给出了地基超静孔压和平均固结度的解析表达式。实例分析表明, 超静孔压随着增压管长度增大而增大, 沿深度始终呈逐渐增大的非线性分布模式; 开启增压后超静孔压瞬时增大, 尤其地基中下部增加明显, 其后消散速度也增大; 增压总时长对地基固结度影响较为显著, 增压荷载为 20、40 kPa 时, 总时长为 100 d 比 50 d 的固结度分别可提高约 8%、9%。

关键词: 饱和软弱土; 增压式真空预压; 排水固结; 超静孔隙水压力; 固结度

中图分类号: TU 441

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2025) 07-2160-19

Analytical solution for consolidation of saturated soft clay under vacuum preloading with non-sand drainage system considering nonlinear drain resistance

NI Rui-si¹, XIAO Shi-guo¹, WU Bing², LIANG Yao²

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China;

2. Sichuan Transportation Survey and Design Co., Ltd., Chengdu, Sichuan 610017, China)

Abstract: Based on the basic characteristics of the sand-free air-boosted vacuum preloading, a radial seepage calculation unit model centered on the booster pipe, which is a non-ideal well, is established, taking into account the spatiotemporal nonlinear characteristics of the well resistance of drainage plates and the relationship between the booster load and its pipe length. The nonhomogeneous partial differential control equations are consequently derived. According to the Sturm-Liouville eigentheory, the analytical solution to the excessive pore water pressure is obtained using the eigenfunction expansion method. Further, analytical expressions for calculating the excessive pore water pressure and the average consolidation degree of the foundation are provided under three typical practical pressurization modes, including constant pressurization loading, constant pressurization loading in the later stage, and intermittent pressurization in the later stage, respectively. Some examples show that the excessive pore water pressure increases as the length of the pressurized pipe increases, and always shows a nonlinear distribution that gradually increases with depth. After the pressurization is initiated, the excessive pore water pressure increases instantaneously, with a more pronounced increase in the middle and lower parts of the foundation, and subsequently, its dissipation rate also increases. The total pressurization duration has a significant impact on the consolidation degree of the foundation. When the pressurization loads are 20 kPa and 40 kPa, the consolidation degrees increase by approximately 8% and 9%, respectively, for a total pressurization duration of 100 d compared to 50 d.

Keywords: saturated soft soil; air-booster vacuum preloading; drained consolidation; excessive pore water pressure; consolidation degree

收稿日期: 2024-10-09

录用日期: 2025-01-11

基金项目: 四川省交通勘察设计研究院有限公司资助科技项目 (No.232022009); 国家自然科学基金资助项目 (No.51578466)。

This work was supported by the Program of Sichuan Communication Surveying & Design Institute Co., Ltd. (232022009) and the National Natural Science Foundation of China (51578466).

第一作者简介: 倪睿思, 女, 2000 年生, 硕士研究生, 主要从事地基基础及路基工程研究。E-mail: niruisi123@foxmail.com

通讯作者: 肖世国, 男, 1973 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事路基工程和基础工程研究。E-mail: xiaoshiguo@swjtu.cn

1 引言

真空预压法是软土地基排水固结处理的一种技术手段, 施工过程中无噪音、无振动、不污染环境, 具有显著的低碳环保特点。传统真空预压普遍反映出加压荷载偏小、真空度衰减明显、固结时间长、工后沉降量大等问题, 其有效加固深度较为有限。为此, 增压式真空预压技术^[1]对其进行了改进, 即在传统的真空预压法基础上增设增压系统, 该系统主要由喷出高压气体的增压泵、埋设在土体内部的增压管及空气压力传递管道组成, 实现对地基土体的径向增压。这样具有增大土体的总固结压力、使土体内部产生微小的劈裂裂隙、减小排水板表面淤堵等作用, 综合提升饱和软土地基的排水效果。

目前关于增压式真空预压法的研究主要为现场实测^[2]、室内模型试验^[3-4]和数值模拟^[5], 相关研究表明, 与传统真空预压法相比, 注气增压法可提高土体渗透性, 从而加快孔压消散和土体固结^[5], 而且对深层土体也具有良好的加固效果^[3]。在理论研究方面, 沈宇鹏等^[6-7]采用分离变量法和积分变换法求出了径向渗流时非理想井的增压式真空预压固结解析解。卢萌盟等^[8]推导了在考虑径竖向渗流的情况下存在涂抹效应和排水板变井阻时增压式真空预压的理论解, 其针对增压管径向加载作用以及管井分布的模式, 提出了等体积应变假设和一种以增压管为中心的新型计算模型。Shen 等^[9]基于增压式真空预压在单层均质土体中的径向固结解析解, 推导了多层地基的理论解。孙锦鑫等^[10]就两种研究增压式真空预压的计算模型以排水板为中心或以增压管为中心进行了理论对比, 推导了两种模型中在径竖向组合渗流时的固结理论解。

传统的真空预压法在地基表面铺设砂垫层作为渗水体, 真空度通过砂垫层传递至地基土体和排水板, 使得真空负压在到达排水板前已存在损耗, 而且对于缺乏砂石料的地区, 大面积铺设砂垫层存在增大造价的问题, 因此, 可考虑取消砂垫层以减少真空负压在砂垫层中的传播损耗及工程造价, 即形成无砂式或直排式真空预压法。Indraratna 等^[11]通过试验发现, 无砂真空预压时排水体孔压会较快稳定为线性分布的模式。基于此, 田乙^[12]、郭霄^[13]等通过实测或经验数据设定排水体的孔压作为土体孔压的已知边界条件, 提出了一种求解孔压的方法。由于此方法中的竖井孔压由人为设定, 且不能考虑边界孔压随时间的变化, 尚缺乏理论严密性。针对土体表面无砂无密封膜式真空预压, Chai 等^[14]认为

无砂土体顶面为不排水边界, 排水板顶面为给定的真空负压, 借鉴 Hansbo 解法求出了近似解; Geng 等^[15]对比了对有无密封膜的理论分析结果和试验数据, 利用积分变换法推导了真空联合堆载预压时的非理想井理论解。其中, 相关经验参数的确定尚存在一定的主观性。

实际上, 考虑到增压与无砂垫层的优点, 可以将二者同时引入到真空预压法中, 即形成了新型的无砂增压式真空预压方法。目前, 关于无砂增压式真空预压的深入理论分析研究鲜见报道。同时, 以往关于真空预压方面的理论研究, 一般未考虑井阻的时空变化特征。在实际工程中, 随着时间的发展和深度的增加, 排水板淤堵程度增大、弯折机率上升, 排水板的排水能力因而下降, 由此造成井阻效应凸显, 即排水板排水能力下降的效应随时间的发展和土体深度的延伸而不断增大。描述此问题的传统变井阻模型认为排水板渗透系数最终衰减至 0, 低估了其排水能力, 而传统常井阻模型则会高估地基的固结程度, 因而传统的相关理论模型仍存在较多缺陷。

鉴于此, 本文针对新型的无砂增压式真空预压方法, 基于该方法的具体特点与井阻时空变化特征, 采取以增压管为中心的新计算模型, 充分考虑实际常出现的排水板井阻的时空非线性变化特性以及涂抹效应, 推导地基土径向渗流模式下排水固结的理论解析解, 并进行实例分析与讨论不同增压模式的结果。

2 理论方法

2.1 分析模型

针对井阻时空非线性变化的一般特征, 在无砂增压式真空预压作用下, 饱和软土地基中径向渗流的基本分析模型如图 1 所示。图中, r 为距增压管中心的径向距离, r_s 为涂抹区边界距中心距离, r_p 为增压管半径, R_e 为单个增压管有效影响范围 (计算单元) 的等效圆柱体半径。考虑到实际工程中增压管数量相对排水板较少, 且增压管对周围土体主要产生辐射压力荷载的作用, 故模型中心的 $r \leq r_p$ 区域为向外辐射压力荷载的增压管, $r_p \leq r < r_s$ 区域是未干扰区, $r_s \leq r \leq R_e$ 区域内为由涂抹面积 A_m 等效的环形涂抹区, 有 $r_s = \sqrt{R_e^2 - n_d(sr_w)^2}$, 其中, r_w 为传统以排水板为中心的排水板等效半径, 一般为 33 mm, s 为涂抹比, n_d 为排水板的等效个数。增压管与土体的交界面径向边界不排水, 模型径向外边界为离散布设的排水板等效后的连续排水边界,

考虑排水板的井阻时空变化特征,且由渗流连续性,改用排水板的竖向边界条件并结合渗透性来描述外边界排水性。图 1 中, H 为软土地层的总厚度, L 为增压管长度, 一般 $L \leq H$, z 为距地面深度。

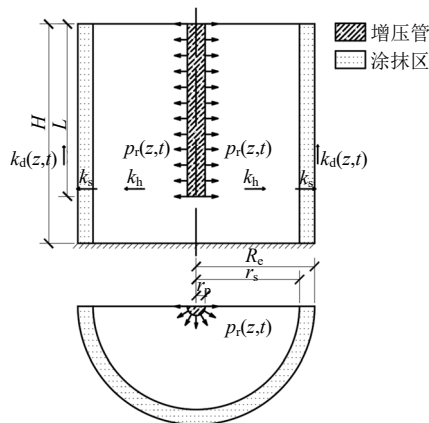


图 1 饱和软弱地基中径向渗流的基本分析模型

Fig.1 Basic analytical model of radial seepage in saturated soft ground

为便于实际操作,增压管与排水板之间的排列位置关系一般包括三角形、六边形、疏松与密集正方形等 4 种,如图 2 所示。计算单元中排水板的等效个数 n_d 由排水板的布置方式决定,当排水板为三角形或疏松正方形布置时(见图 2(a)、2(b)), $n_d=1$; 当排水板为六边形布置时(见图 2(c)), $n_d=2$; 当排水板为密集正方形布置时(见图 2(d)), $n_d=3$ 。为便于表述,进一步引入相关符号: E_v 、 ν 分别为土体的体积变形模量和泊松比; A_d 为单个排水板的截面积,一般为厚 4 mm×长 100 mm=400 mm²; $u_s(r, z, t)$ 为土体的超静孔隙水压力; $u_d(z, t)$ 为排水板内的孔隙水压力; $k_r(r)$ 为径向变化的土体水平向渗透系数,在涂抹区内为 k_s , 在未干扰区内为 k_h ; $k_d(z, t)$ 为随时间和深度变化的排水体渗透系数; p_v 为瞬时施加

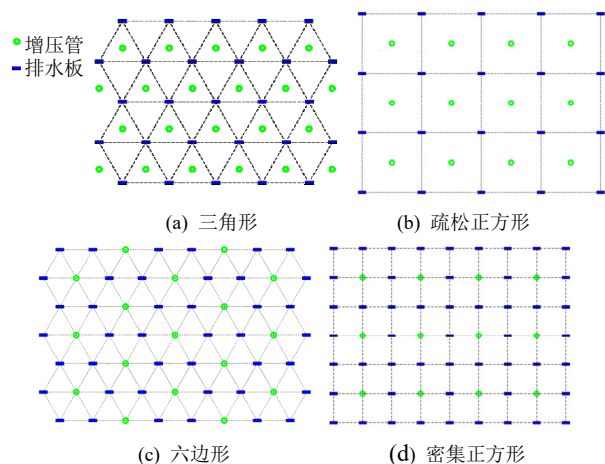


图 2 增压管与排水板的布设方式

Fig.2 Layout of booster pipes and drainage plates

的真空负载,实际工程中常取 80 kPa; $p_r(z, t)$ 为径向增压荷载,考虑增压作用的有效性,可令 $p_r(z, t) = p_{ru} h_r(z) f_t(t)$, 其中, p_{ru} 为增压满载值, h_r 为与深度相关的增压系数,在增压管长度范围内取 1, 其余取 0, f_t 为增压荷载随时间的变化系数, t 为时间。

2.2 基本假定

- (1) 同一水平面内各土体单元体积应变相等;
- (2) 考虑到地表无砂渗水层条件下地基土竖向渗流较少,假定地基土中仅有径向渗流排水板,且渗流服从达西定律;
- (3) 土体为饱和土,土体颗粒和孔隙水均不可压缩;
- (4) 涂抹区与未干扰区的土体仅水平渗透系数不同,其余性质相同;
- (5) 不考虑排水板内孔压的径向变化;
- (6) 单位时间内排水板的径向流入与竖向流出水量相等;
- (7) 真空负载瞬时施加且保持不变;
- (8) 考虑排水板井阻的时空变化特性,假定排水板渗透系数 k_d 随时间呈指数型衰减但最终仍有排水能力,且随深度呈线性衰减^[16-17]。即

$$k_d = k_{d0} h_d(z) f_d(t) \quad (1)$$

式中: k_{d0} 为初始时刻的渗透系数; h_d 与 f_d 分别为渗透系数的深度、时间衰减指数,这里对深度仍采用线性变化模式,但对时间采取更具一般化且终值非零的非线性模式(简称扩展非线性模式),其表达式为

$$h_d(z) = 1 - az / H \quad (2)$$

$$f_d(t) = \beta + (1 - \beta) e^{-bt} \quad (3)$$

式中: a 、 b 分别为渗透系数的深度、时间衰减参数, a 为不大于 1 的正的无量纲量, $b > 0$, 单位一般为 s^{-1} ; β 为排水板渗透系数衰减后的稳定值与初始值之比。特别地,当 $a=0$ 、 $\beta=1$ 时,为常井阻的情况;当 $\beta=0$ 时,为传统的认为排水板最终完全堵塞没有排水能力的指数衰减模式。

2.3 控制方程

对于前述的无砂增压式真空预压排水固结问题,径向渗流的一般固结方程^[18]为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ k_r(r) r \left[\frac{\partial}{\partial r} u_s(r, z, t) \right] \right\} = - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_v(z, t) \quad (4)$$

式中: γ_w 为水的重度; $\varepsilon_v(z, t)$ 为土体的体积应变。在式(4)的基础上,还需满足如下所示的两个径向

连续条件:

$$r = r_p, \quad \frac{\partial u_s(r, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

$$r = R_c, \quad u_s(R_c, z, t) = u_d(z, t) \quad (6)$$

对式(4)中的 r 积分一次, 并结合边界条件式(5), 有

$$\frac{\partial}{\partial r} u_s(r, z, t) = -\frac{(r^2 - r_p^2) \gamma_w}{2k_r(r) \cdot r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_v(z, t) \quad (7)$$

再对式(7)中的 r 积分一次, 并结合边界条件式(6), 有

$$u_s(r, z, t) = \frac{\gamma_w}{2\partial t} \varepsilon_v(z, t) \int_{R_c}^r \frac{r_p^2 - \xi^2}{k_r(\xi) \xi} d\xi + u_d(z, t) \quad (8)$$

式中: ξ 为径向距离积分变量。

定义 $\bar{u}_s(z, t)$ 为单个增压管有效影响范围内地基中任一深度处的平均超静孔压 $\bar{u}_s$, 则有

$$\bar{u}_s(z, t) = \frac{1}{\pi(R_c^2 - r_p^2)} \int_{r_p}^{R_c} 2\pi r u_s(r, z, t) dr \quad (9)$$

将式(8)代入式(9), 经推导整理有

$$\bar{u}_s(z, t) = u_d(z, t) + \frac{\gamma_w R_c^2 F_s}{2k_h} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_v(z, t) \quad (10)$$

式中: F_s 为与涂抹效应相关的中间变量, 有

$$F_s = \frac{2k_h}{(R_c^2 - r_p^2) R_c^2} \int_{r_p}^{R_c} r \cdot \int_{R_c}^r \frac{r_p^2 - \xi^2}{k_r(\xi) \xi} d\xi dr。$$

若考虑涂抹区土体的水平渗透系数 k_s 为常数, 即

$$k_r(r) = \begin{cases} k_h & r_p \leq r < r_s \\ k_s & r_s \leq r \leq R_c \end{cases} \quad (11)$$

结合第 2.1 节所述的边界条件, 中间变量 F_s 可进一步表达为

$$F_s = \frac{2}{n_{cp}^4 - n_{sp}^2} \left[\frac{4 \ln n_{sp} + 2 - 2n_{sp}^2 + (n_{sp}^2 - 1)^2}{8} - \frac{n_{sp}^4 - n_{cp}^4}{8\chi} + \frac{\ln n_{cp} - \ln n_{sp} + n_{sp}^2 - n_{cp}^2}{2\chi} \right] \quad (12)$$

式中: n_{cp} 、 n_{sp} 、 χ 均为无量纲变量, $n_{cp} = R_c/r_p$; $n_{sp} = r_s/r_p$; $\chi = k_s/k_h$ 。

由 2.2 节中基本假定的第 1 条, 即等体积应变假定, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_v(z, t) = \frac{(1-2\nu)}{E_v} \left[2 \frac{\partial}{\partial t} p_r(z, t) - 3 \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_s(z, t) \right] \quad (13)$$

将式(13)代入式(10), 有

$$\bar{u}_s = u_d + \frac{\gamma_w R_c^2 F_s (1-2\nu)}{2k_h E_v} \left(\frac{2\partial}{\partial t} p_r - \frac{3\partial}{\partial t} \bar{u}_s \right) \quad (14)$$

对于单个增压管有效影响范围, 由渗流连续条件, 即

$$\frac{2\pi R_c k_s}{\gamma_w} \frac{\partial u_s}{\partial r} \Big|_{r=R_c} = \frac{n_d A_d}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[k_d(z, t) \frac{\partial u_d}{\partial z} \right] \quad (15)$$

由式(8)对 r 求偏导, 有

$$\frac{\partial}{\partial r} u_s(r, z, t) = \frac{\gamma_w}{2} \cdot \left[\frac{r_p^2 - r^2}{k_r(r) \cdot r} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_v(z, t) \quad (16)$$

将式(16)代入式(15), 整理得

$$\frac{\partial \varepsilon_v(z, t)}{\partial t} = \frac{n_d A_d}{\pi \gamma_w (r_p^2 - R_c^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[k_d(z, t) \frac{\partial u_d}{\partial z} \right] \quad (17)$$

再将式(17)代入式(10)得

$$\bar{u}_s = u_d + \frac{n_d A_d R_c^2 F_s}{2\pi k_h (r_p^2 - R_c^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[k_d(z, t) \frac{\partial u_d}{\partial z} \right] \quad (18)$$

将式(18)代入式(14), 整理得

$$-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left[h_d(z) f_d(t) \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) \right] + \frac{\partial}{\partial t} u_d(z, t) - \frac{\lambda}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[h_d(z) f_d(t) \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) \right] = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial t} p_r(z, t) \quad (19)$$

其中, 各中间参量的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{R_c^2 F_s} \cdot \frac{k_h E_v}{3\gamma_w (1-2\nu)} \\ \rho^2 &= \frac{2k_h (n^2 - n_p^2)}{k_{d0} R_c^2 F_s} \\ n &= \frac{R_c}{r_d} \\ n_p &= \frac{r_p}{r_d} \\ r_d &= \sqrt{\frac{n_d A_d}{\pi}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这样, 式(19)即为无砂增压式真空预压排水固结的控制方程, 其定解条件包括边界条件:

$$z=0, \quad u_d(0,t)=-p_v \quad (21)$$

$$z=H, \quad \frac{\partial}{\partial z} u_d(z,t)=0 \quad (22)$$

初始条件:

$$t=0, \quad \bar{u}_s(z,0)=2p_r(z,0) \quad (23)$$

其中,在初始时刻,因真空作用为 0,由真空与增压作用叠加组成的土体超静孔压中只有增压作用的部分;此时对于计算单元土体中任一点,均承受半圆形的均布增压荷载,其综合作用可由增压管压力沿半圆周积分表征,结果等于 2 倍的增压管压力。

2.4 方程求解

式 (19) 所示的控制方程为非齐次方程,可采用本征函数展开法求解^[19]。基本求解思路为根据边界条件求解齐次方程的本征函数系,再代入非齐次方程,根据本征函数系的正交完备性对非齐次项和初始条件进行本征函数系展开,最后求出完整解。下面只给出超静孔压与固结度的最终结果,具体推导过程详见附录 A。

土体中的超静孔隙水压力和排水板内的孔隙水压力的表达式分别为

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(z,t) = & -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \cdot \\ & \left[\frac{2p_{ru} A_{mr}}{3} \int_0^t f_r'(\omega) \cdot \left(\frac{C_m e^{-b\omega} + 1}{C_m e^{-b\omega} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{[-\lambda D_m(t-\omega)]} d\omega + \right. \\ & \left. (2p_{ru} f_r(0) A_{mr} + p_v A_{mv}) \left[\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right]^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_d(z,t) = & -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \cdot \\ & \left\{ \frac{2p_{ru} E_m A_{mr}}{3} \int_0^t \frac{f_r'(\omega) \cdot (C_m e^{-b\omega} + 1)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m - 1 \right)}}{(C_m e^{-b\omega} + 1)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)}} e^{(-\lambda D_m \omega)} d\omega + \right. \\ & \left. \frac{E_m [2p_{ru} f_r(0) A_{mr} + p_v A_{mv}]}{C_m + 1} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m - 1 \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

式中: ω 为时间积分变量; m 为不同本征值的计算个数,理论上为无穷个,数值计算中取 $m=800$ 即可收敛; η_m 为与各本征值对应的计算值,本质为附录 A 非线性方程 (A13) 的非零解,可由 Matlab 编程

解出 m 个相异的 η_m ; $D_0(\eta_m \sqrt{1 - az/H})$ 为由 Bessel 函数系组成的本征函数系,详见附录 A 式 (A14); A_{mr} 、 A_{mv} 分别为 p_v 和 p_r 在本征函数系上的展开系数,详见附录 A 式 (A33)、(A36); C_m 、 D_m 、 E_m 分别为与各本征值相对应的计算中间变量,详见附录 A 式 (A46) ~ (A48)。

由此,根据经典土力学中地基土平均固结度 U 的定义,可进一步推得

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{\int_0^H \sigma'(z,t) dz}{\int_0^H \sigma(z,t) dz} = \\ & \frac{\int_0^H [2p_{ru} f_r(t) \cdot h_r(z) - \bar{u}_s(z,t)] dz}{\int_0^H [2p_{ru} f_r(t) \cdot h_r(z) + p_v] dz} = \\ & 1 - \frac{\sum_0^m T_m(t) \cdot \left[\frac{2}{a\eta_m} D_1(\eta_m) \right]}{2p_{ru} f_r(t) \cdot \frac{L}{H} + p_v} \end{aligned} \quad (26)$$

式中: σ 为总应力; σ' 为有效应力, $\sigma' = 2p_r - \bar{u}_s$; $D_1(\eta_m)$ 为涉及 Bessel 函数的计算值,详见附录 A 式 (A17); $h_r(z)$ 为增压荷载沿深度的分布系数,详见附录 A 式 (A43); $T_m(t)$ 为 $u_d(z,t)$ 的时间函数部分,详见附录式 (A49)。

需要说明的是,因真空预压不同于普通大气压环境下的地基固结,是相对于 $-p_v$ 真空条件下的固结,因此,式 (26) 所示的固结度表达式中分母增加了 p_v 。

一般而言,增压模式可分为 3 种:模式 I 为真空预压启动时即恒定增压;模式 II 为真空预压启动后一段时间再恒定增压;模式 III 为真空预压启动后一段时间再间歇式增压,如图 3 所示。

对于真空预压启动时即恒定增压模式,见图 3(a),则 $f_r(t)=1$, $f_r'(t)=0$,式 (24)、(26) 分别简化为

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(z,t) = & -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \cdot \\ & \left[(2p_{ru} A_{mr} + p_v A_{mv}) \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} U(t) = & 1 - \frac{1}{2p_{ru} \cdot \frac{L}{H} + p_v} \sum_0^m \left[\frac{2}{a\eta_m} D_1(\eta_m) \right] \cdot \\ & \left[(2p_{ru} A_{mr} + p_v A_{mv}) \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

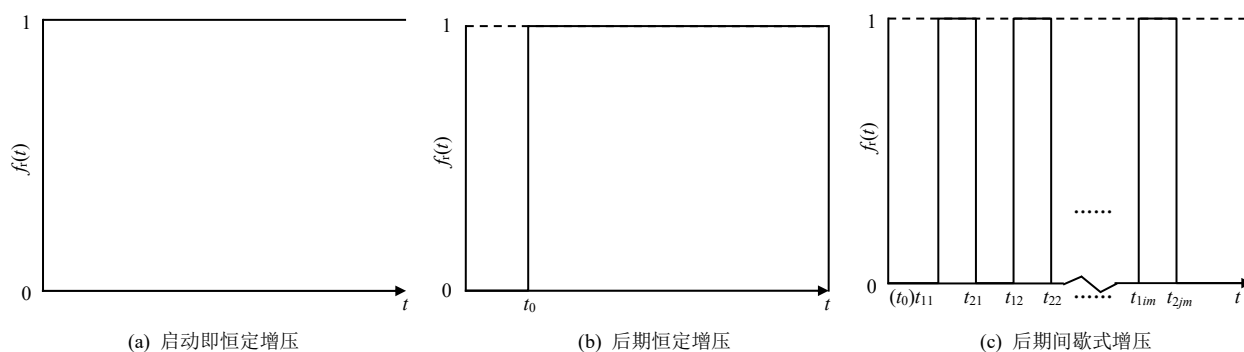


图3 增压荷载的典型加压方式
Fig.3 Typical loading methods for pressurization

对于真空预压启动后一段时间 t_0 再恒定增压模式, 见图 3(b), 则相应

$$\bar{u}_s(z, t) = \begin{cases} -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \left[p_v A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right], & t < t_0 \\ -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \left\{ p_v A_{mv} e^{(-\lambda D_m t)} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} + \frac{2p_{ru} A_{mr}}{3} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-bt_0} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{[-\lambda D_m (t-t_0)]} \right\}, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (29)$$

$$U(t) = \begin{cases} 1 - \sum_0^m \left(\frac{2}{a\eta_m} D_1(\eta_m) \right) \left[A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right], & t < t_0 \\ 1 - \frac{1}{2p_{ru} \cdot \frac{L}{H} + p_v} \sum_0^m \left[\frac{2}{a\eta_m} D_1(\eta_m) \right] \left\{ \frac{2p_{ru} A_{mr}}{3} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-bt_0} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{[-\lambda D_m (t-t_0)]} + \right. \\ \left. p_v A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right\}, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (30)$$

对于真空预压启动后一段时间 t_0 再间歇式增压模式, 见图 3(c), 则相应

$$\bar{u}_s(z, t) = \begin{cases} -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \left[p_v A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right], & t < t_0 \\ -p_v + \sum_0^m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \left\{ p_v A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)} + \frac{2p_{ru} A_{mr}}{3} \left\{ \sum_{i=1}^{j_m} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-bt_{i_j}} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{[-\lambda D_m (t-t_{i_j})]} - \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{j=1}^{j_m} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-bt_{2_j}} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{[-\lambda D_m (t-t_{2_j})]} \right\} \right\}, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (31)$$

$$U(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^m \left[\frac{2}{a\eta_m} D_1(\eta_m) \right] \left[A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda E_m}{b} \right)} e^{(-\lambda D_m t)} \right], & t < t_0 \\ 1 - \frac{1}{2p_{ru} f_r(t) \cdot \frac{L}{H} + p_v} \sum_{i=0}^m \left[\frac{2}{a\eta_m} D_1(\eta_m) \right] \left\{ p_v A_{mv} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda E_m}{b} \right)} e^{(-\lambda D_m t)} + \frac{2p_{ru} A_{mr}}{3} \left[\sum_{i=1}^{i_m} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-bt_{li}} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda E_m}{b} \right)} e^{[-\lambda D_m(t-t_{li})]} - \sum_{j=1}^{j_m} \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-bt_{2j}} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda E_m}{b} \right)} e^{[-\lambda D_m(t-t_{2j})]} \right] \right\}, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (32)$$

式中: t_0 为真空预压启动后至增压前的时间间隔; t_{li} 指处于第 i 个间歇增压周期的瞬时加载时刻; t_{2j} 指处于第 j 个间歇增压周期的瞬时卸载时刻; t_{li} 为 t_{11} 、 t_{12} 、... t_{1i_m} , 指在计算时间点 t 之前所有的增压瞬时加载时刻; t_{2j} 为 t_{21} 、 t_{22} 、... t_{2j_m} , 指在计算时间点 t 之前所有的增压瞬时卸载时刻。

具体计算求解可通过 Matlab 编程实现, 详见附录 B。

3 比较验证

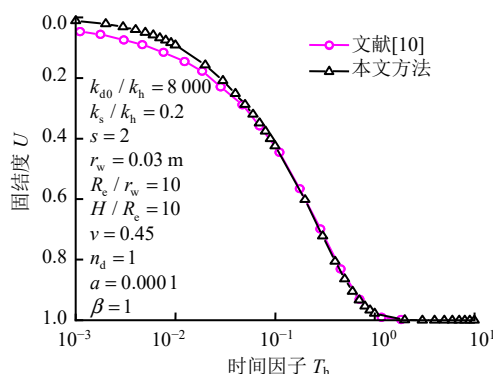
对文献[8]与文献[10]所描述的真空预压启动时即恒定增压的算例, 本文方法与既有算法的得到的地基平均固结度 U 的变化曲线对比, 见图 4。可见, 本法与既有方法的计算结果非常接近。对于图 4(a) 中在前期略有差异, 可能原因在于既有方法考虑了地土基竖向渗流, 而本文方法仅考虑径向渗流 (见 2.2 节基本假定 (2))。

另外, 文献[20]依托广珠铁路珠海西客站工程, 现场试验对比了增压式真空预压与传统真空预压的差异性。其中, 增压试验区 N3 采用以增压管为中心的 正六边形排水板 布设方式, 排水板间距为 1 m, 软土层厚为 18 m, 增压管长为 8 m; 试验前期为纯真空预压阶段, 在真空开启 60 d 后增压 10 kPa。现将该试验区在预压过程中地表沉降量的变化转化为固结度的增长, 并与本文方法计算结果进行对比, 具体计算参数与结果见图 5。可见, 本文方法计算得到的固结度与增压式真空预压的现场实测结果几乎重合, 二者吻合良好, 本文方法具有实际有效性。

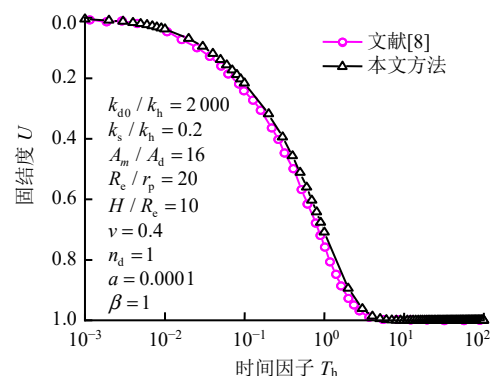
4 实例分析与讨论

4.1 工程概况

四川省天府新区经眉山—乐山高速公路 A 标段路基工程, 地基由上而下依次主要为流塑~软塑状饱和黏土、软~可塑状饱和粉质黏土、强风化砂质泥岩, 饱和软弱黏土层厚度为 7 m。路基填方高度为 6~11 m, 拟采用无砂增压式真空预压方法处理



(a) 文献[10]算例



(b) 文献[8]算例

图 4 本文方法与既有方法的地基平均固结度结果对比
Fig.4 Comparison of average ground consolidation degrees between the proposed method and existing methods

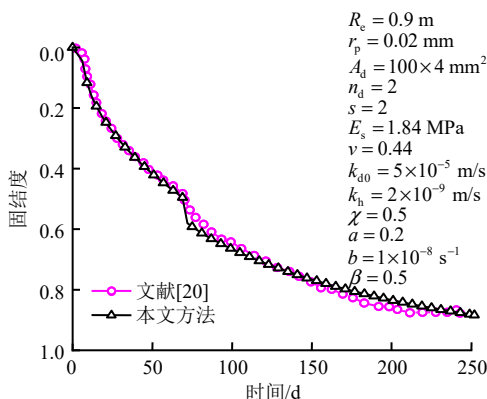


图 5 本文方法与现场试验的地基平均固结度对比
Fig.5 Comparison of average ground consolidation degrees between the proposed method and field test results

该软弱地基。真空负载 $-p_v$ 取为 -80 kPa, 另根据地勘资料与试验结果且结合工程经验, 相关计算参数

取值见表 1, 若无特殊说明, 各实例的计算参数同表 1。

表 1 工程实例计算参数
Table 1 Calculation parameters of a practical example

软土层厚度 H/m	计算单元半径 R_c/m	增压管半径 r_p/m	增压管长度 L/m	排水板截面积 A_d/mm^2	排水板等效个数 $n_d/\text{个}$	变形模量 E_v/MPa	土体渗透系数 $k_h/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
7	0.9	0.0125	7	100×4	2	1.318	5.3×10^{-7}
泊松比 ν	涂抹区边界距中心 距离 r_s/m	涂抹区较未扰动区渗 透系数比 χ	排水体初始渗透系数 $k_{d0}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	k_d 的深度衰减系 数 a	k_d 的时间衰减系 数 b/s^{-1}	k_d 的稳定比 β	增压满载值 p_{ru}/kPa
0.45	0.89	0.2	1×10^{-5}	0.5	1×10^{-7}	0.5	20

4.2 计算结果与分析

4.2.1 仅真空预压

设地下水位线位于地表, 在仅真空预压 (无增压) 条件下, 地基中总孔隙水压随时间消散曲线与典型时刻沿深度分布曲线, 如图 6 所示。可见, 总孔隙水压力随时间呈非线性衰减, 前期 (前 200 d) 衰减幅度较大, 后期消散速率显著变缓。随着时间延长, 总孔隙水压力沿深度分布由非线性逐渐变为线性增大模式, 地基软土层底部的总孔隙水压力消散程度最慢。

4.2.2 增压模式 I: 真空预压启动时即恒定增压

考虑增压深度范围的影响, 在增压管长度 L 分别为 3、5、7 m 情况下, 超静孔隙水压力 (简称超静孔压) 与地基土平均固结度 (简称固结度) 随时间变化以及超静孔隙水压力沿深度分布曲线, 如图 7、8 所示 (实线)。为便于对比, 图中也给出了在增压管长度 $L=7$ m 的情况下, 仅在距增压管底端高度 D 分别为 3、5、7 m 范围内进行增压的结果 (虚线), 称之为中下部增压, 前者则为中上部增压, 其中, 中上部增压 $L=7$ m 与中下部增压 $D=7$ m 实际是同一种增压情况, 故在各图中两者均重合。可见, 不同深度处, 地基土中的超静孔隙水压力均随时间呈非线性消散, 地基土平均固结度则随时间呈非线性增大。随着增压深度范围的增大, 地基中超静孔压也增大, 其沿深度仍呈逐渐增大的非线性分布模式。增压范围内的土体在前期出现较为明显的超静孔压增大, 若进行中上部增压, 则前期超静孔压呈上大下小的分布模式; 若进行中下部增压, 则前期地基中下部土体较上部土体超静孔压更大。在地基固结后期, 土中超静孔压均较小且分布变得平缓, 则增压范围内的土体有效应力增长较大。这进一步说明, 对于传统真空预压中常出现的深层土体难以排水固结的问题, 通过在软土地基中下部增压的方式可能会改善排水固结效果。

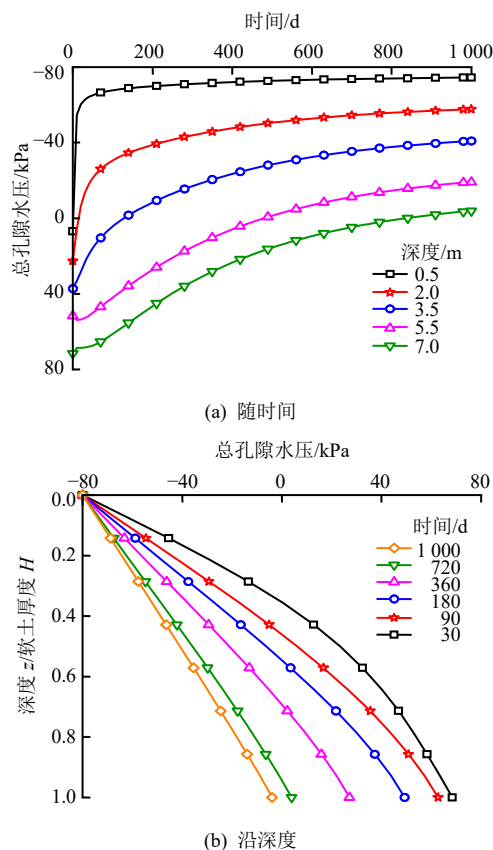


图 6 地基土中总孔隙水压力随时间与深度变化曲线
Fig.6 Curves showing the variation of total pore water pressure in the foundation soil with time and depth

需要说明的是, 对于图 7(c)所示的增压管底部位置的土体固结度曲线呈现初期局部先上升后下降现象, 其原因可解释为: 因不直接承受增压荷载作用, 增压管下部土体初始超静孔压为 0, 但在初期一定时间内, 随时间发展, 增压作用范围内的超静孔压减小而转化为有效应力, 土体中孔隙水逐渐向上排出, 增压管下部土体中孔隙水随之有限排出 (受上部孔隙水排出影响的时间与程度均有限), 因而其超静孔压在前期存在增幅之后便逐渐消散, 即图中呈现的初期局部峰值现象。

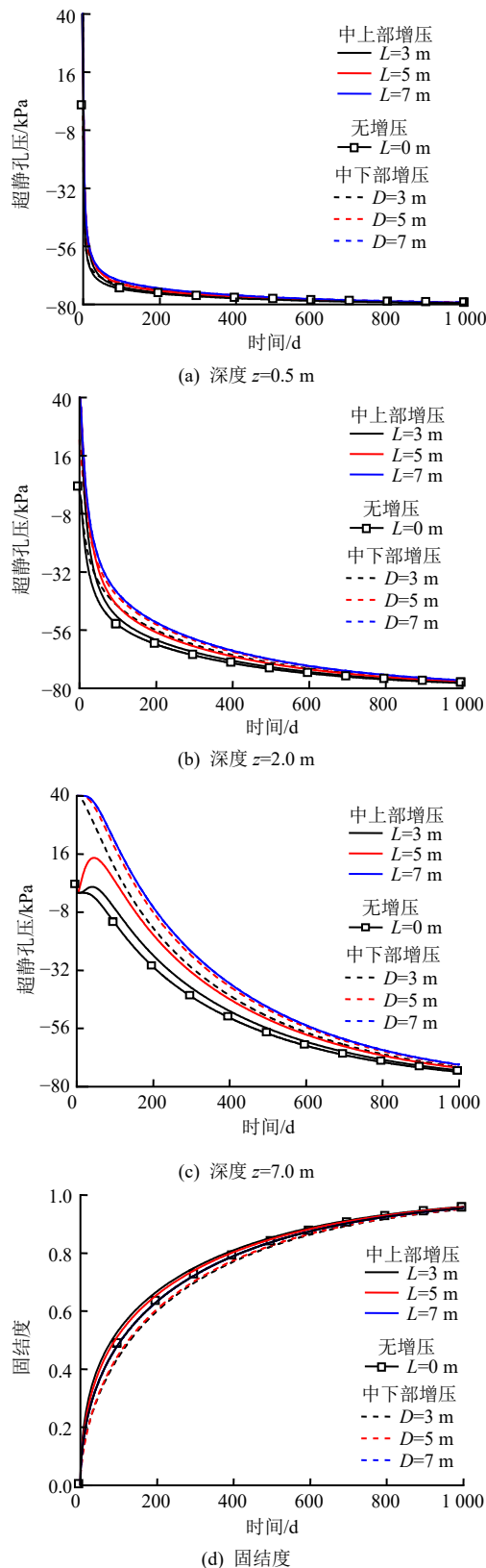


图7 增压模式I下超静孔隙水压力与固结度随时间变化曲线

Fig.7 Time-dependent curves of excess pore water pressure and consolidation degree under pressurization mode I

如图2所示,排水板布设呈三角形或疏松正方形、六边形、密集正方形时,相应 $n_d=1、2、3$ 。

图9为在 n_d 的这3种取值下相应计算结果。可见,排水板布设为三角形或疏松正方形、六边形、密集正方形时,超静孔压消散速度逐渐加快,土体固结程度逐渐明显提高。以200d的固结度为例,这3种布设方式下分别为46.1%、63.4%、75.0%,后两者相对于三角形或疏松正方形分别增长了37.5%、62.7%。由此,综合考虑排水板用量节约和土体固结效果,建议以增压管为中心的六边形方式布设排水板。

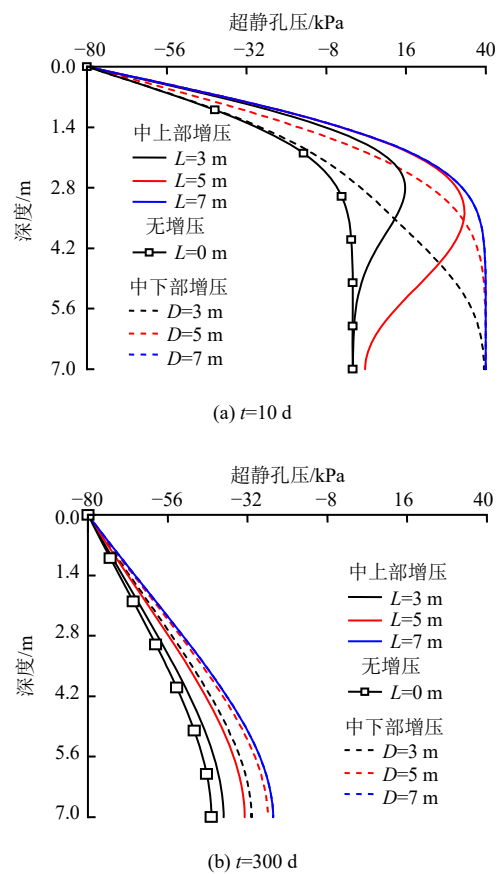
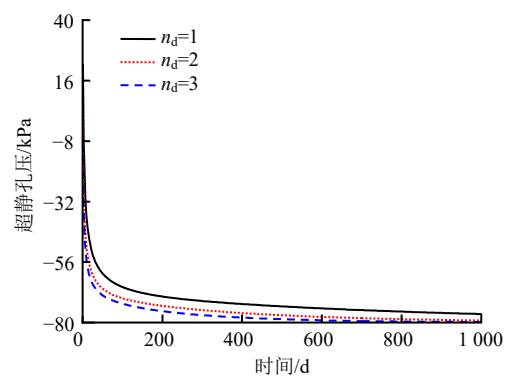
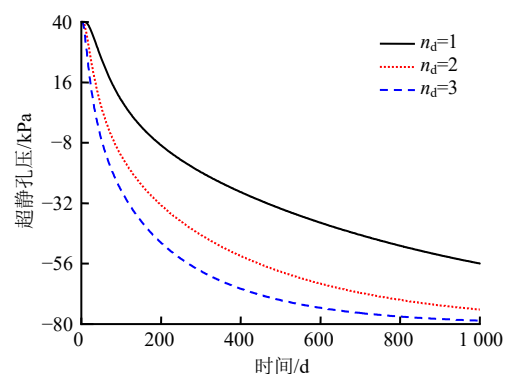
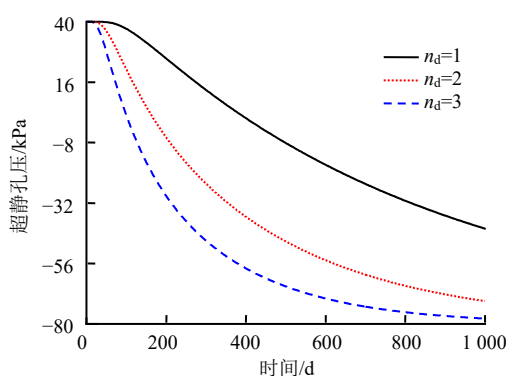
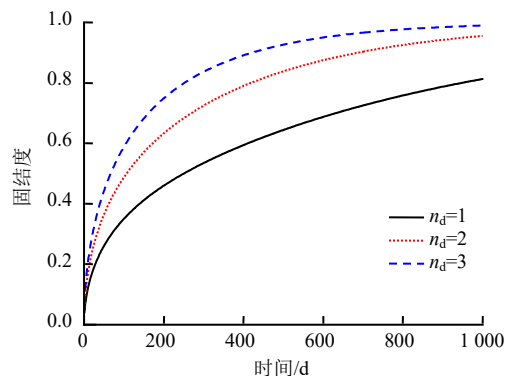


图8 增压模式I下典型时刻超静孔隙水压力沿深度分布曲线

Fig.8 Depth distribution curves of excess pore water pressure at typical times under pressurization mode I

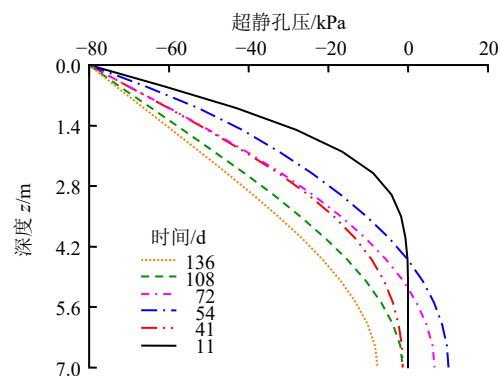
4.2.3 增压模式II: 真空预压启动后一段时间再恒定增压

以真空预压启动后50d再开启 $p_{ru}=20\text{ kPa}$ 的恒定增压为例,按本文方法,计算得到地基土超静孔隙水压力、固结度沿深度分布与随时间变化曲线如图10所示。可见,开启增压后,地基土中超静孔隙水压力瞬时增大,尤其土层中下部增加明显,其后消散速度也增大,因而有效应力增长加快,地基土平均固结度增大明显,在固结度曲线上存在时间为50d时的明显陡增现象。

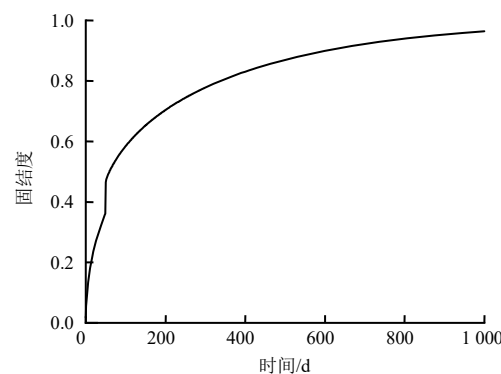
(a) 深度 $z=0.5$ m(b) 深度 $z=3.5$ m(c) 深度 $z=7.0$ m

(d) 固结度

图 9 排水板布设方式对土体固结效果的影响
Fig.9 Impacts of drainage plate layout on soil consolidation effectiveness



(a) 超静孔隙水压力



(b) 固结度

图 10 增压模式 II 下超静孔隙水压力与固结度的变化曲线
Fig.10 Variation curves of excess pore water pressure and consolidation degree under pressurization mode II

4.2.4 增压模式 III：真空预压启动后一段时间再间歇式增压

考虑实际工程条件，可在真空预压启动后一段时间再开启增压系统，以加载—持载—卸载—停载为 1 个周期，进行间歇式循环增压。这里将增压持载总时长设置为 50、100 d 两种，增压荷载设置为 20、40 kPa 两种，其余参数见表 1。在增压总时长和增压荷载一致的前提下，以 3 种方式为例讨论增压随时间的变化模式对土体固结的影响，分别为方式 1——真空预压 50 d 增压启动与循环 1 次；方式 2——真空预压 80 d 增压启动与循环 1 次；方式 3——真空预压 50 d 增压启动与循环 10 次。需要说明的是，实际工程中增压循环次数较多，这里为简化计算过程（提高计算效率）且旨在说明单次与多次循环的固结效果差异性，仅将方式 3 的循环次数取为 10 次，且每个循环周期中持载时间和停载时间相同。

计算得到不同增压方式下地基土的平均固结度随时间的变化曲线，见图 11。可见，固结度随时间总体呈非线性增大的变化特征，在增压加卸载期间，固结度均随加卸载同步出现增大与减小。增压

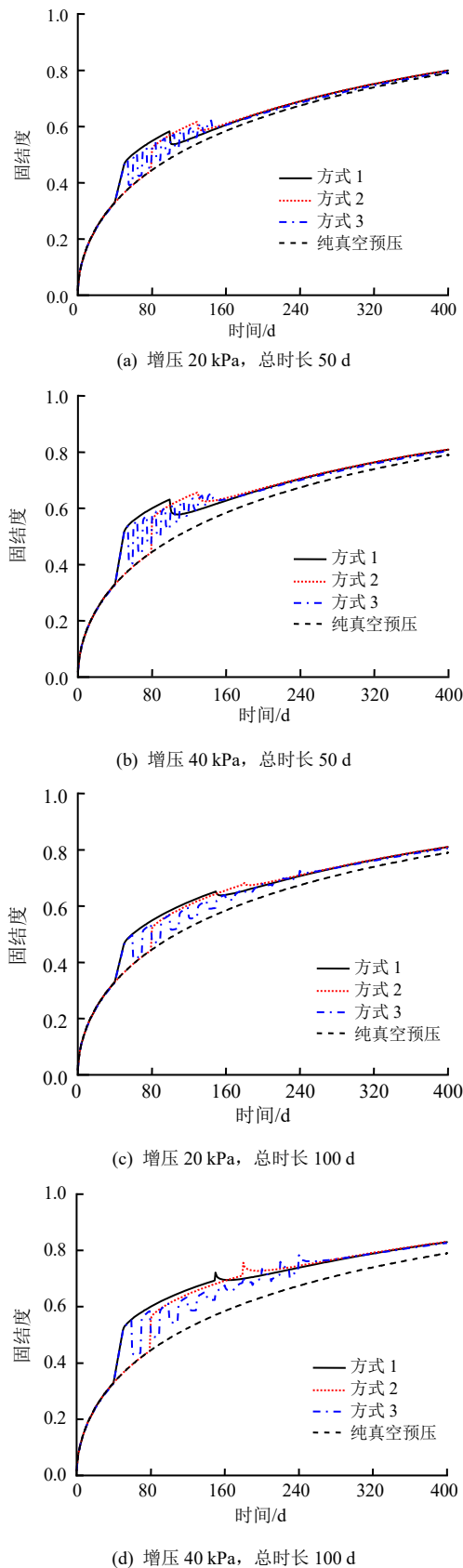


图 11 增压模式 III 下固结度随时间变化曲线
Fig.11 Time-dependent curves of consolidation degree under pressurization mode III

引起的固结度提高效果主要受增压的荷载大小和总时长影响。由方式 1 与方式 3 的结果对比可见,在

加载总时长和增压荷载大小一定的条件下,间歇式加载中单次持载的时间较长,加载间隔时间较短,加卸载频率较低,可较快提升固结度,即在真空预压启动后 100 d 之内,方式 1 比方式 3 更有利于快速提高固结度,全部加载完成后二者的最终固结度基本一致。对于方式 2,相对于方式 1 与方式 3,因增压启动时间较晚,前期对地基土的固结作用较差,而在真空预压启动后 160 d 以后,三者的固结作用几乎没有差异。这种无差异的原因在于,因饱和软弱土体内增压对真空度影响机制十分复杂而难以求解,本文理论模型中没有考虑增压作用对真空度的影响。实际上,工程中在进行间歇式增压过程中时刻监测真空度变化,可通过调整增压方式来维持真空度接近目标值,因而增压作用对真空度的影响属于非主要因素。但应该注意,增压系统一直开启会引起土体中真空度下降,因而采用间歇式增压既能保证真空度处于较高水平,又能充分发挥增压的促进固结的正向作用,实际工程中进行间歇性增压是必要的。

由图 11(a)、11(c)或图 11(b)、11(d)对比可见,在增压荷载大小一定的情况下,增压总时长较大,在真空预压启动后 240 d 之内,增压对地基土的固结度提升作用较为明显,可使地基土相对较快地固结。在真空预压启动后第 240 d,增压荷载为 20、40 kPa 时,总时长为 100 d 比为 50 d 的固结度分别相对提高约 8%、9%。相较于传统的真空预压(可视为增压荷载和增压总时长均为 0),在 240 d 时,增压总时长为 100 d、增压荷载为 40 kPa 的增压式真空预压可使地基固结度提高约 13%。

需要注意的是,图 11(c)、11(d)中的固结度在后期有一定的波动,其原因在于,此种情况的增压荷载为图 3(c)所示的突增突降的间歇性增压模式,因而相应的固结度有所波动;另外,本例相关计算分析中时间步长取值较小,数值计算结果也受阶跃式的增压荷载值影响而显现小幅波动。

5 结 论

本文针对饱和软弱土地基无砂增压式真空预压的排水固结问题,充分考虑包括扩展非线性模式在内的井阻的时空非线性变化特性,以及增压管长度的影响,建立了以增压管为中心的径向渗流非理想井分析模型,基于土体单元等体积应变假定,推导出非齐次的偏微分控制方程,采用广义傅里叶级数与本征函数展开法进行求解,得到了地基土超静孔隙水压力与平均固结度的理论解,结合实例讨论

了3种增压模式的结果。主要得出以下结论:

(1) 地基土中的超静孔隙水压力随时间呈非线性消散, 平均固结度则随时间呈非线性增大。随着增压管长度增大, 超静孔隙水压力也增大, 其沿深度仍呈逐渐增大的非线性分布模式。对于真空预压启动时即恒定增压模式, 相对于在地基土中下部增压, 在中上部增压时前期地基土中上部超静孔隙水压力相对较大而下部相对较小, 后期整个地基土中超静孔隙水压力均相对较小且分布变得平缓。通过在软土地基中下部增压的方式可能会改善深层土体排水固结效果。

(2) 对于真空预压启动后一段时间再恒定增压模式, 开启增压后地基土中超静孔隙水压力瞬时增大, 尤其土层中下部增加明显, 其后消散速度也增大, 因而有效应力增长加快, 地基平均固结度增大明显, 在固结度曲线上存在增压时刻明显陡增现象。

(3) 对于真空预压启动后一段时间再间歇式增压模式, 在增压加卸载期间, 固结度均随加卸载同步出现增大与减小。增压的荷载大小和总时长是影响固结度的主要因素, 间歇式加载中单次持载的时间较长, 可较快提升固结度。在增压荷载一定的情况下, 增压总时长较大时对地基土的固结度提升作用较为明显。实例分析表明, 在真空预压启动后第240 d, 增压荷载分别为20、40 kPa时, 总时长为100 d比50 d的固结度分别相对提高约8%、9%; 相应地, 增压总时长100 d、增压荷载40 kPa的增压式真空预压可使地基固结度提高约13%。

参考文献

- [1] 金亚伟, 金亚君, 蒋君南, 等. 增压真空预压固结处理软土地基/尾矿渣/湖泊淤泥装置: 中国, CN200820160080.7[P]. 2009-07-15.
JIN Ya-wei, JIN Ya-jun, JIANG Jun-nan, et al. Treatment using vacuum preloading with air pressure boosted in soft foundation ore raling mud: China, CN200820160080.7[P]. 2009-07-15.
- [2] CAI Y, XIE Z, WANG J, et al. New approach of vacuum preloading with booster prefabricated vertical drains (PVDS) to improve deep marine clay strata[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2018, 55(10): 1359-1371.
- [3] 雷华阳, 胡垚, 雷尚华, 等. 增压式真空预压加固吹填超软土微观结构特征分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(增刊1): 32-40.
LEI Hua-yang, HU Yao, LEI Shang-hua, et al. Analysis of microstructure characteristics of air-booster vacuum preloading for ultra-soft dredger fills[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(Suppl.1): 32-40.
- [4] 曾芳金, 位会星, 王军, 等. 深层增压式真空预压法处理软土地基室内模型试验[J]. 工业建筑, 2014, 44(7): 90-94.
ZENG Fang-jin, WEI Hui-xing, WANG Jun, et al. Laboratory model test of treating soft soil ground using deep air-boosted vacuum preloading[J]. **Industrial Construction**, 2014, 44(7): 90-94.
- [5] 史吏, 胡东东, 蔡袁强, 等. 增压式真空预压吹填淤泥孔压实时响应及加固机制初探[J]. 岩土力学, 2020, 41(1): 185-193.
SHI Li, HU Dong-dong, CAI Yuan-qiang, et al. Preliminary study on real-time pore water pressure response and reinforcement mechanism of dredged slurry treated by air-booster vacuum preloading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(1): 185-193.
- [6] 沈宇鹏, 王云超, 董淑海, 等. 增压式真空预压处理单层均质土固结理论研究[J]. 铁道学报, 2019, 41(4): 118-124.
SHEN Yu-peng, WANG Yun-chao, DONG Shu-hai, et al. Study on consolidation theory of single-layer homogeneous soil treated by air-boosted vacuum preloading[J]. **Journal of the China Railway Society**, 2019, 41(4): 118-124.
- [7] 沈宇鹏, 董淑海, 王云超, 等. 增压式真空预压两种固结解析解的对比分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(增刊1): 3171-3178.
SHEN Yu-peng, DONG Shu-hai, WANG Yun-chao, et al. Comparative analysis between integral-transform solution and separate variable method for consolidation of the ground by air-boosted vacuum preloading[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2019, 38(Suppl.1): 3171-3178.
- [8] 卢萌盟, 孙锦鑫, 李传勋, 等. 考虑变并阻的增压式真空预压固结解析模型及解答[J]. 岩石力学与工程学报, 2023, 42(5): 1259-1272.
LU Meng-meng, SUN Jin-xin, LI Chuan-xun, et al. Analytical solutions for consolidation of soft soil improved by air-boosted vacuum preloading considering the varied well resistance of PVDs[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2023, 42(5): 1259-1272.
- [9] SHEN Y, LIU Y, GENG S, et al. Consolidation theory of homogeneous multilayer treatment by air-boosted vacuum preloading[J]. **European Journal of Environmental and**

- Civil Engineering**, 2022, 26(12): 5634-5652.
- [10] 孙锦鑫, 卢萌盟, 敖祖瑞, 等. 增压式真空预压地基固结解析模型研究[J/OL]. 工程力学, 2023. [2023-06-02]. <https://kns.cnki.net/kcms2/detail/11.2595.O3.20230602.1530.004.html>
- SUN Jin-xin, LU Meng-meng, AO Zu-rui, et al. Study on analytical models for consolidation of soft ground improved by air-boosted vacuum preloading[J/OL]. **Engineering Mechanics**, 2023. [2023-06-02]. <https://kns.cnki.net/kcms2/detail/11.2595.O3.20230602.1530.004.html>
- [11] INDRARATNA B, BAMUNAWITA C. Soft clay stabilization by mandrel driven geosynthetic vertical drains[J]. **Australian Geomechanics Journal**, 2002, 37(5): 57-86.
- [12] 田乙, 吴文兵, 梅国雄, 等. 塑料排水板联合真空预压的径向固结理论研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(10): 2151-2160.
- TIAN Yi, WU Wen-bing, MEI Guo-xiong, et al. Radial consolidation theory for prefabricated vertical drain combined with vacuum preloading[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2019, 38(10): 2151-2160.
- [13] 郭霄, 谢康和, 卢萌盟, 等. 直排式真空预压法下竖井地基的非线性固结解析解[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2018, 49(2): 384-392.
- GUO Xiao, XIE Kang-he, LU Meng-meng, et al. Nonlinear analytical solution for consolidation of vertical drains by straight-line vacuum preloading method[J]. **Journal of Central South University (Science and Technology)**, 2018, 49(2): 384-392.
- [14] CHAI J, CARTER J P. Deformation analysis in soft ground improvement[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011.
- [15] GENG X, INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C. Analytical solutions for a single vertical drain with vacuum and time-dependent surcharge preloading in membrane and membraneless systems[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2012, 12(1): 27-42.
- [16] 郭霄. 复杂条件下竖井地基固结解析理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2016.
- GUO Xiao. Analytical study on consolidation theory of soft soils with vertical drains under complicated condition[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016.
- [17] 史蓝天, 李传勋, 杨洋. 变荷载下考虑井阻随时空变化的竖井地基固结解[J]. 岩土力学, 2023, 44(1): 183-192.
- SHI Lan-tian, LI Chuan-xun, YANG Yang. Analytical solution for consolidation of soft soils with vertical drains by considering variable well resistance with time and depth and time-dependent loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2023, 44(1): 183-192.
- [18] 谢康和, 曾国熙. 等应变条件下的砂井地基固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 1989, 11(2): 3-17.
- XIE Kang-he, ZENG Guo-xi. Analytical theory for consolidation of sand drain under equal strain assumption[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1989, 11(2): 3-17.
- [19] 周邦寅, 王一平, 李立. 数学物理方程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- ZHOU Bang-yin, WANG Yi-ping, LI Li. Equations of mathematical physics[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.
- [20] 沈宇鹏, 余江, 刘辉, 等. 增压式真空预压处理站场软基效果试验研究[J]. 铁道学报, 2011, 33(5): 97-103.
- SHEN Yu-peng, YU Jiang, LIU Hui, et al. Experimental study on air-boosted vacuum preloading of soft station foundation[J]. **Journal of the China Railway Society**, 2011, 33(5): 97-103.

附录 A 控制方程求解推导过程

A1 齐次方程相应的本征方程和本征函数系

本文各变量含义及其符号汇总见表 A1。

首先, 对控制方程式 (19) 对应的齐次方程进行求解:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(h_d(z) f_d(t) \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) \right) + \\ & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(h_d(z) f_d(t) \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) \right) - \\ & \rho^2 \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

结合竖向边界条件式 (21) ~ (22), 经边界条件齐次化后, 将解设为分离变量的形式, 即

$$u_d(z, t) = \sum_m Z_m(z) T_m(t) - p_v \quad (\text{A2})$$

式中: $Z_m(z)$ 、 $T_m(t)$ 分别为待求的空间函数和时间函数部分。

此时边界条件转化为齐次形式, 有

$$z = 0: Z_m(0) = 0 \quad (\text{A3})$$

表 A1 基本变量含义及符号
Table A1 Meanings and symbols of basic variables

类别	基本变量	符号
几何参数	计算单元 软土层厚度 (排水板长度)	H
	等效圆柱体影响半径	R_e
	半径	r_p
	长度	L
	仅中下段增压时的增压长度	D
排水板	截面积	A_d
	单元内等效个数	n_d
土性参数	体积变形模量	E_v
	泊松比	ν
	径向渗透系数	k_h
涂抹参数	涂抹区边界距中心距离	r_s
	涂抹区渗透系数	k_s
	以排水板为中心模型的涂抹比	s
井阻参数	排水体初始渗透系数	k_{d0}
	变化系数 深度衰减系数	a
	时间衰减系数	b
	最终系数	β
预压荷载	真空负载	p_v
	增压荷载满载值	p_{cu}
	随时间的工作模式	$f(t)$
	随深度的分布模式	$h(z)$
中间参量	详见式 (12)	F_s
	详见式 (20) 第 1 式	λ
	详见式 (20) 第 2 式	ρ
	详见式 (20) 第 3 式	n
	详见式 (20) 第 4 式	n_p
	详见式 (20) 第 5 式	r_d
	$n_{ep}=R_e/r_p$	n_{ep}
	$n_{sp}=r_s/r_p$	n_{sp}
	$\chi=k_s/k_h$	χ
	不同本征值的计算个数	m
与本征函数系相关的计算中间变量	与本征值对应的计算值, 详见附录 A 式 (A14)	η_m
	p_v 在本征函数系上的展开系数, 详见附录 A 式 (A33)	A_{mv}
	p_r 在本征函数系上的展开系数, 详见附录 A 式 (A36)	A_{mv}
	详见附录 A 式 (A46)	C_m
	详见附录 A 式 (A47)	D_m
	详见附录 A 式 (A48)	E_m
	排水板上超静孔压	$u_d(z,t)$
计算量	地基中任一深度处的平均超静孔压	$\bar{u}_s(z,t)$
	地基土平均固结度	$U(t)$

$$z = H: \frac{d}{dz} Z_m(z) = 0 \quad (A4)$$

将式 (A2) 代入式 (A1), 整理可得

$$\frac{h'_d(z)Z'_m(z) + h_d(z)Z''_m(z)}{Z_m(z)} = \frac{\rho^2 T'_m(t)}{f_d(t)T'_m(t) + (f'_d(t) + \lambda f_d(t))T_m(t)} = -K_m \quad (A5)$$

式中: K_m 为待定常数。

结合式 (A3)、(A4) 求解本征函数系, 即求解

二阶变系数线性齐次常微分方程, 可知其为 Sturm-Liouville 型本征问题 (简称为 S-L 问题)。由 S-L 问题的本征理论可知, 该方程对应无数个本征值, 且本征值均为非负实数, 故可令 $K_m = \alpha_m^2$, 其中, α_m 为本征值 ($\alpha_m > 0$, $\alpha_m = 0$ 对应无意义的零解), 本征方程可转化为

$$h_d(z)Z''_m(z) + h'_d(z)Z'_m(z) + \alpha_m^2 Z_m(z) = 0 \quad (A6)$$

对方程 (A6) 进行变量代换 $\bar{z} = 1 - az/H$, 可得

$$\bar{z} \left(\frac{a}{H} \right)^2 \frac{d^2 Z_m}{d\bar{z}^2} + \left(\frac{a}{H} \right) \frac{dZ_m}{d\bar{z}} + \alpha_m^2 Z_m = 0 \quad (A7)$$

对方程 (A7) 进行变量代换 $x = \sqrt{\bar{z}}$, 有

$$\frac{d^2 Z_m}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dZ_m}{dx} \cdot \frac{dx}{d\bar{z}} \right) \cdot \frac{d\bar{z}}{dx} = \frac{1}{4x} \left(-\frac{1}{x^2} \frac{dZ_m}{dx} + \frac{1}{x} \frac{d^2 Z_m}{dx^2} \right) \quad (A8)$$

将式 (A8) 代入式 (A7), 整理可得

$$\frac{d^2 Z_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_m}{dx} + \eta_m^2 Z_m = 0 \quad (A9)$$

其中, 中间计算值 η_m 记为

$$\eta_m = \frac{2H\alpha_m}{a} \quad (A10)$$

式 (A9) 为零阶 Bessel 方程, 其通解为

$$Z_m(z) = C_{m1} J_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) + C_{m2} Y_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \quad (A11)$$

式中: J_0 、 Y_0 分别为第 1 类 0 阶 Bessel 函数和第 2 类 0 阶 Bessel 函数; C_{m1} 、 C_{m2} 为待定参数。将式 (A3)、(A4) 代入式 (A11), 可得

$$\begin{bmatrix} J_0(\eta_m) & Y_0(\eta_m) \\ \eta_m J_1(\eta_m \sqrt{1-a}) & \eta_m Y_1(\eta_m \sqrt{1-a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m1} \\ C_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A12)$$

式中: J_1 、 Y_1 为第 1 类 1 阶 Bessel 函数和第 2 类 1 阶 Bessel 函数。

为使式 (A11) 为非零解, 则 C_{m1} 、 C_{m2} 不能同时为 0, 即 (A12) 存在非零解, 其系数矩阵行列式 g_A 为 0, 即

$$g_A = J_0(\eta_m) \cdot \eta_m Y_1(\eta_m \sqrt{1-a}) - Y_0(\eta_m) \cdot \eta_m J_1(\eta_m \sqrt{1-a}) = 0 \quad (A13)$$

通过 Matlab 对非线性方程 (A13) 进行数值求零根, 可得出无数个 η_m 。再将 η_m 代入式 (A12), 因系数矩阵非满秩, 故只可求出 C_{m1} 、 C_{m2} 的相对关系, 由此可确定本征函数系为

$$D_0(\eta_m x) = J_0(\eta_m x) + B_m Y_0(\eta_m x) \quad (\text{A14})$$

其中, 变量 B_m 与 x 的表达式分别为

$$B_m = \frac{C_{m2}}{C_{m1}} \quad (\text{A15})$$

$$x = \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \quad (\text{A16})$$

类似地, 可定义:

$$D_1(\eta_m x) = J_1(\eta_m x) + B_m Y_1(\eta_m x) \quad (\text{A17})$$

A2 本征函数系的微分关系

由 Bessel 函数的性质, 对式 (A14) 求导, 有

$$\frac{d}{dx} D_0(\eta_m x) = -\eta_m D_1(\eta_m x) \quad (\text{A18})$$

式 (A14) 作为式 (A9) 的通解, 满足方程 (A9), 即

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 D_0(\eta_m x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dD_0(\eta_m x)}{dx} + \eta_m^2 D_0(\eta_m x) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} D_0(\eta_m x) \right] = -\eta_m^2 x D_0(\eta_m x) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dx} [x D_1(\eta_m x)] = \eta_m x D_0(\eta_m x) \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

联立式 (A16)、(A18), 有

$$\frac{d}{dz} D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) = D_1 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \cdot \eta_m \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{az}{H}}} \frac{a}{H} \quad (\text{A20})$$

联立式 (A16)、(A19), 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[\sqrt{1 - \frac{az}{H}} D_1 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \right] = \\ & \frac{d}{d\sqrt{1 - \frac{az}{H}}} \left[\sqrt{1 - \frac{az}{H}} D_1 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \right] \frac{d}{dz} \sqrt{1 - \frac{az}{H}} = \\ & \eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \frac{-\frac{a}{H}}{2\sqrt{1 - \frac{az}{H}}} = \\ & -\alpha_m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

A3 本征函数系展开

由广义傅里叶级数理论可知, 若 $f(z)$ 在区间 $[0, H]$ 内满足 Dirichlet 条件, 则在连续点处, $f(z)$ 可按全体本征函数系展开成广义傅里叶级数, 即

$$f(z) = \sum_m A_m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \quad (\text{A22})$$

式中: A_m 为各项的展开系数。

$$A_m = \frac{\int_0^H f(z) D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) dz}{\int_0^H \left[D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \right]^2 dz} \quad (\text{A23})$$

在第 1 类间断点处, 式 (A22) 的右端收敛为 $f(z)$ 在该点处左右极限的均值。

关于 A_m 的计算, 可分为两部分, 其中分母部分为本征函数系的模的平方。

作变量代换 $dz = -\frac{H}{a} d\bar{z}$, 有

$$\begin{aligned} & \left[D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \right]^2 dz = \\ & -\frac{H}{a} D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \cdot D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) d\bar{z} = \\ & -\frac{H}{a} \left\{ d\bar{z} \left[D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \right]^2 - \bar{z} d \left[D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

欲求式 (A23) 中的定积分, 还需整理式 (A24) 中的微分部分, 有

$$\bar{z} d \left[D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \right]^2 = \bar{z} \cdot 2 D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) d D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \quad (\text{A25})$$

由式 (A18) 的微分关系, 有

$$\begin{aligned} & \bar{z} \cdot 2 D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) d D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) = \\ & -2 \bar{z} D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \cdot \eta_m D_1(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) d \sqrt{\bar{z}} \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

又由式 (A19) 的微分关系, 有

$$\begin{aligned} & -2 \bar{z} D_0(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \cdot \eta_m D_1(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) d \sqrt{\bar{z}} = \\ & -2 \sqrt{\bar{z}} D_1(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) d \sqrt{\bar{z}} D_1(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) = \\ & -d \left[\sqrt{\bar{z}} D_1(\eta_m \sqrt{\bar{z}}) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

将式 (A27) 代入式 (A24) 有

$$D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) \cdot D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) dz = -\frac{H}{a}\left\{d\left[D_0\left(\eta_m\sqrt{\frac{az}{H}}\right)\right]^2 + d\left[\sqrt{\frac{az}{H}}D_1\left(\eta_m\sqrt{\frac{az}{H}}\right)\right]^2\right\} = -\frac{H}{a} \cdot d\left(1-\frac{az}{H}\right)\left\{\left[D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right)\right]^2 + \left[D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right)\right]^2\right\} \quad (\text{A28})$$

再对式 (A28) 求 $[0, H]$ 内的定积分, 可得

$$\int_0^H D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) \cdot D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) dz = -\frac{H}{a}\left\{-\left[D_0(\eta_m)\right]^2 + \left[D_1(\eta_m)\right]^2\right\} + (1-a)\left\{\left[D_0\left(\eta_m\sqrt{1-a}\right)\right]^2 + \left[D_1\left(\eta_m\sqrt{1-a}\right)\right]^2\right\} \quad (\text{A29})$$

结合式 (A3)、(A4), 有

$$\int_0^H D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) \cdot D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) dz = \frac{H}{a}\left\{(a-1)\left[D_0\left(\eta_m\sqrt{1-a}\right)\right]^2 + \left[D_1(\eta_m)\right]^2\right\} \quad (\text{A30})$$

对于实际一般情况 $x \in [0, H]$, $f(z) = 1$, 则由式 (A21) 的微分关系, 有

$$\int_0^H f(z) D_m\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) dz = -\frac{2H}{a\eta_m}\left[\sqrt{1-\frac{aL_2}{H}}D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{aL_2}{H}}\right) - \sqrt{1-\frac{aL_1}{H}}D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{aL_1}{H}}\right)\right] \quad (\text{A35})$$

相应的展开系数为

$$A_m = \frac{2}{\eta_m\left\{(a-1)\left[D_0\left(\eta_m\sqrt{1-a}\right)\right]^2 + \left[D_1(\eta_m)\right]^2\right\} \cdot \left[\sqrt{1-\frac{aL_1}{H}}D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{aL_1}{H}}\right) - \sqrt{1-\frac{aL_2}{H}}D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{aL_2}{H}}\right)\right]} \quad (\text{A36})$$

A4 本征函数系展开法求解非齐次方程

A4.1 控制方程回代

至此, 已确定满足齐次边界条件和齐次方程的本征函数系。下面使用本征函数展开法对非齐次控制方程式 (19) 进行求解。按照式 (A2) 的形式, 可将解预设为

$$u_d(z, t) = \sum_m D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) T_m(t) - p_v \quad (\text{A37})$$

根据前述分析, 该解已满足竖向边界条件式 (5)、(6)。

$$\int_0^H D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) dz = \left[-\frac{2H}{a\eta_m}\sqrt{1-\frac{az}{H}}D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right)\right]\Bigg|_0^H = -\frac{2H}{a\eta_m}\left[\sqrt{1-a}D_1\left(\eta_m\sqrt{1-a}\right) - D_1(\eta_m)\right] \quad (\text{A31})$$

再结合式 (A4) 化简可得

$$\int_0^H D_0\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) dz = \frac{2H}{a\eta_m}D_1(\eta_m) \quad (\text{A32})$$

将式 (A30)、(A32) 代入式 (A23), 可得展开系数 A_m 为

$$A_m = \frac{2D_1(\eta_m)}{\eta_m\left\{(a-1)\left[D_0\left(\eta_m\sqrt{1-a}\right)\right]^2 + \left[D_1(\eta_m)\right]^2\right\}} \quad (\text{A33})$$

考虑实际工程常见情况, 在区间 $[0, H]$ 内, $f(z)$ 一般可取为

$$f(z) = \begin{cases} 1, & L_1 < x < L_2 \\ 0, & 0 < x < L_1 \text{ 或 } L_2 < x < H \end{cases} \quad (\text{A34})$$

则可得式 (A23) 的分子部分为

由式 (A20) 与 (A21), 可得

$$\frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) = \sum_m D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) \eta_m \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{az}{H}}} \frac{a}{H} T_m(t) \quad (\text{A38})$$

$$h_d(z) f_d(t) \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) = \sum_m \frac{a}{2H} \eta_m \sqrt{1-\frac{az}{H}} D_1\left(\eta_m\sqrt{1-\frac{az}{H}}\right) T_m(t) f_d(t) \quad (\text{A39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(h_d(z) f_d(t) \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) \right) = \\ - \sum_m \left(\frac{a \eta_m}{2H} \right)^2 D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) T_m(t) f_d(t) = \\ - \sum_m \alpha_m^2 D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) T_m(t) f_d(t) \end{aligned} \quad (\text{A40})$$

再将式 (A37) 代入方程 (19) 中, 并结合式 (A38) ~ (A40), 整理可得

$$\begin{aligned} \sum_m \left\{ T'_m(t) [\alpha_m^2 f_d(t) + \rho^2] + \alpha_m^2 T_m(t) [f'_d(t) + \lambda f_d(t)] \right\} \cdot \\ D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) = \frac{2\rho^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} p_r(z, t) \end{aligned} \quad (\text{A41})$$

A4.2 偏微分方程转化为常微分方程

由 S-L 问题本征理论可知, 由所有满足式 (A13) 的 η_m 对应组成的本征函数系 $D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right)$ 为正交完备系, 故非齐次项可以在该函数系上唯一展开且收敛, 即

$$\frac{2\rho^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} p_r(z, t) = \frac{2\rho^2}{3} p_{ru} f'_r(t) \sum_m A_{mr} D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \quad (\text{A42})$$

考虑增压管一般上部存在不透汽段, 下部未完全打穿软土层, 则增压荷载随深度的分布形式可写为

$$h_r(z) = \begin{cases} 1, & L_1 < x < L_2 \\ 0, & 0 < x < L_1 \text{ 或 } L_2 < x < H \end{cases} \quad (\text{A43})$$

式中: L_1 和 L_2 分别为增压段上端点和下端点距地表的距离。

此函数所对应的展开系数 A_{mr} 见式 (A36)。若认为增压荷载随深度无变化, 即 $x \in [0, H]$, $h_r(z) = 1$ 则相应的展开系数 A_{mr} 见 (A33)。

将式 (3)、(A42) 代入式 (A41), 整理可得式 (A44), 此即将偏微分方程转化为常微分方程:

$$\begin{aligned} \left\{ T'_m(t) [\alpha_m^2 f_d(t) + \rho^2] + \alpha_m^2 T_m(t) [f'_d(t) + \lambda f_d(t)] \right\} = \\ \frac{2p_{ru}}{3} \rho^2 A_{mr} f'_r(t) \\ \Rightarrow \left[T'_m(t) (C_m e^{-bt} + 1) + T_m(t) (\lambda D_m + (\lambda - b) C_m e^{-bt}) \right] \\ = \frac{2p_{ru}}{3} E_m A_{mr} f'_r(t) \end{aligned} \quad (\text{A44})$$

其中, 各中间变量的表达式为

$$g_m = \frac{\rho}{\alpha_m} \quad (\text{A45})$$

$$C_m = \frac{1 - \beta}{g_m^2 + \beta} \quad (\text{A46})$$

$$D_m = \frac{\beta}{g_m^2 + \beta} \quad (\text{A47})$$

$$E_m = \frac{g_m^2}{g_m^2 + \beta} = 1 - D_m \quad (\text{A48})$$

由一阶线性常微分方程的通解可知, 方程 (A44) 的解为

$$\begin{aligned} T_m(t) = \left\{ \int_0^t \left[\frac{2p_{ru}}{3} \frac{E_m A_{mr} f'_r(\omega)}{(C_m e^{-b\omega} + 1)} e^{\int_0^\omega \left[\frac{(\lambda D_m + (\lambda - b) C_m e^{-b\tau})}{(C_m e^{-b\tau} + 1)} \right] d\tau} d\omega + \right. \right. \\ \left. \left. T_m(0) \right\} e^{\int_0^t \left[\frac{(\lambda D_m + (\lambda - b) C_m e^{-b\tau})}{(C_m e^{-b\tau} + 1)} \right] d\tau} \end{aligned} \quad (\text{A49})$$

其中, 变上限积分部分的解析表达式为

$$e^{\int_0^t \left[\frac{(\lambda D_m + (\lambda - b) C_m e^{-b\tau})}{(C_m e^{-b\tau} + 1)} \right] d\tau} = \left[\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m + 1} \right]^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m - 1 \right)} \cdot e^{(-\lambda D_m t)} \quad (\text{A50})$$

A4.3 由初始条件定解

由式 (18) 有

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(z, t) = \\ u_d(z, t) - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(h_d(z) f_d(t) \cdot \frac{\partial}{\partial z} u_d(z, t) \right) = \\ \sum_m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) T_m(t) \left[\frac{(C_m e^{-bt} + 1)}{E_m} \right] - p_v \end{aligned} \quad (\text{A51})$$

则初始条件式 (23) 可转化为

$$\begin{aligned} \sum_m D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) T_m(0) \left[\frac{(C_m + 1)}{E_m} \right] = \\ 2p_r(z, 0) + p_v \end{aligned} \quad (\text{A52})$$

将式 (A52) 右端按本征函数系展开, 有 $2p_r(z, 0) + p_v =$

$$\sum_m \left[2p_{ru} f_r(0) A_{mr} + p_v A_{mv} \right] \cdot D_0 \left(\eta_m \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \quad (\text{A53})$$

将式 (A53) 代入式 (A52), 可得

$$T_m(0) = [2p_{ru}f_r(0)A_{mr} + p_v A_{mv}] \cdot \frac{E_m}{C_m + 1} \quad (\text{A54})$$

将式 (A54) 代入式 (A49) 可确定 $T_m(t)$, 则由此可得到 $u_d(z, t)$ 和 $\bar{u}_s(z, t)$ 的完整解。

附录 B 数值计算方法

B1 非线性方程求解

数值计算的第 1 步是求解非线性方程 (A13), 得出 η_m 的数值解。

η_m 的数值解个数决定级数的计算项数, 数值解的精确度和个数也就高度影响解的精确度, 参照文献[16], 将要求的 η_m 个数定为 800, 以满足对精确度和计算效率的双重要求。

由 Bessel 函数的振动特性可知, Bessel 函数也具有近似的“周期性”, 表现为相邻两波峰的间隔近似相等。但方式 (A13) 中 Bessel 型函数的振动周期依赖 a 的大小, a 越大则方程抖动越快, a 越小则抖动越缓慢, 此时数值求解零点难度上升。数值求根需要先大致确定根的初值及隔根区间, 但 a 的大小对方程根的分布影响较大, 为了在求解不同的 a 对应的特征方程时, 都能确定统一的隔根区间和求根初值, 对特征值方程对应的零点函数做线性变换, 即坐标轴伸缩。基本思路为: 通过合理设置伸缩系数, 使得伸缩后的函数随 a 变化不大, 即周期几乎一致。求得此函数的零点后再进行线性逆变换得到所需的 η_m 。

当 $a=0$ 时, 本征方程简化为

$$Z_m''(z) + \alpha_m^2 Z_m(z) = 0 \quad (\text{B1})$$

结合竖向边界条件可知, 方程 (B1) 对应的本征函数系为 $\left\{ \sin \frac{(2m-1)\pi}{2H} z \right\}$, 本征值为

$$\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2H} z, \quad (m=1, 2, 3 \dots) \quad [19], \quad \text{函数系}$$

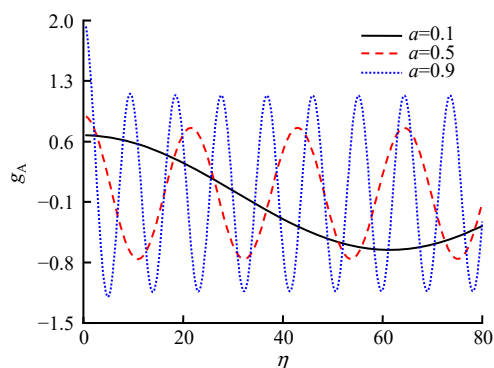
$\left\{ \sin \frac{(2m-1)\pi}{2H} z \right\}$ 可视为 $a \rightarrow 0$ 时,

$\left\{ D_0 \left(\frac{2\alpha_m H}{a} \sqrt{1 - \frac{az}{H}} \right) \right\}$ 的极限情况, 即

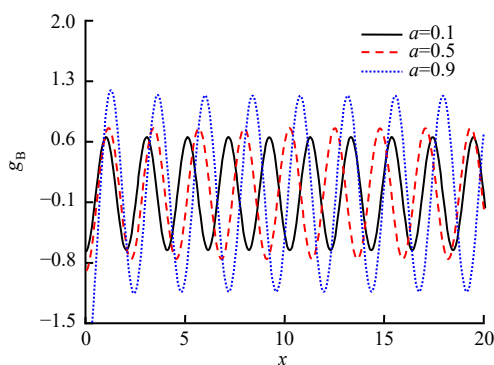
$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \alpha_m &= \frac{2m-1}{2H} \pi, m=1, 2, 3 \dots \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} a \eta_m &= (2m-1)\pi, m=1, 2, 3 \dots \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} a(\eta_{m+1} - \eta_m) &= 2\pi, m=1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

求解非线性方程 (A13) 的根, 即求其左端函数的零点, 观察该函数典型图像, 如图 B1(a)所示, 可得

$$a \rightarrow 1, a(\eta_{m+1} - \eta_m) \approx \pi \quad (\text{B3})$$



(a) 原函数



(b) 伸缩后的函数

图 B1 需求解零点的函数图像

Fig.B1 Graph of the function for zero solutions

由式 (B2) 与 (B3), 可假设:

$$\begin{aligned} a(\eta_{m+1} - \eta_m) &\approx (2-a)\pi \\ \Rightarrow a(\eta_m - \eta_{m-1}) &\approx (2-a)\pi \\ &\dots \\ a(\eta_2 - \eta_1) &\approx (2-a)\pi \\ \Rightarrow \eta_m - \eta_1 &\approx \frac{(2-a)\pi}{a} \cdot (m-1) \\ \Rightarrow \eta_m &\approx \frac{(2-a)\pi}{a} \cdot (m-1) + \eta_1 \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

式中: η_1 为第 1 个零点, 因 $a \rightarrow 0$ 时, $a_1 \rightarrow \frac{\pi}{2H}, \eta_1 \rightarrow \frac{\pi}{a}$, 将其假设为近似的零点初值代入式 (B4), 有

$$\eta_m \approx \frac{(2-a)\pi}{a} \cdot (m-1) + \frac{\pi}{a} \quad (\text{B5})$$

由式(B5)可确定近似的求根初值及隔根区间。为了消除 a 对根分布的影响, 可将坐标轴拉伸, 即令

$$\eta_m = \frac{2-a}{a} \pi \cdot x_m \quad (\text{B6})$$

将式(B6)代入非线性方程式(A13), 可得相应的表达式 g_B 为

$$g_B = \frac{2-a}{a} \left[x_m Y_1 \left(\sqrt{1-a} \frac{2-a}{a} \pi x_m \right) J_0 \left(\frac{2-a}{a} \pi x_m \right) - x_m J_1 \left(\sqrt{1-a} \frac{2-a}{a} \pi x_m \right) Y_0 \left(\frac{2-a}{a} \pi x_m \right) \right] = 0 \quad (\text{B7})$$

由此对方程(A13)求根 η_m 即转化为对方程(B7)求根 x_m , 根据式(B5), 有

$$\eta_m = \frac{2-a}{a} \pi \cdot x_m \approx \frac{(2-a)\pi}{a} \cdot (m-1) + \frac{\pi}{a} \\ \Rightarrow x_m \approx (m-1) + \frac{1}{2-a} \quad (\text{B8})$$

由式(B8)所示的近似关系, 结合方程(B7)左端函数的典型图像, 见图B1(b), 可知对 $a \in (0,1)$, 求方程(B7)的根 x_m 时, 有统一的求根初值和隔根区间。

在 Matlab 编程中对方程(B7)求根 x_m , 利用函数“fzero”求解, 由式(B8)可将初参数设置为 $m-1 + \frac{1}{2-a} (m=1,2,3,\dots)$, 从而可求出若干个解。

然后, 再由 $\eta_m = \frac{2-a}{a} \pi \cdot x_m$, 可得到 η_m 的数值解。

B2 溢机问题处理

式(24)~(32)中涉及到大量指数函数, 在数值计算过程中须注意底数和指数的数值范围以免溢机造成计算出错。

由前述可知 $0 \leq E_m \leq 1$, $0 \leq D_m \leq 1$, $C_m \geq 0$, 则底数 $0 < \frac{1}{C_m+1} < \frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m+1} < 1$, 可保证在 $t \geq 0$ 的计

算中, $\left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m+1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)}$ 始终保持在区间(0,1]之内, 不会出现溢机错误。

另外, 采用 Matlab 内置的变步长辛普森数值积分函数“integral”计算积分部分, 因其原理为取被积函数中的若干点作为求积节点, 再乘以求积系数后叠加, 而在被积函数中存在指数函数, 故数值积分过程中也需避免溢机错误。

不妨设选取的求积节点为 ω_i , 即

$$\int_0^t \frac{f'_r(\omega) \cdot \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m+1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{(-\lambda D_m t)}}{\left(\frac{C_m e^{-b\omega} + 1}{C_m+1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} \cdot e^{(-\lambda D_m \omega)}} d\omega \approx \\ \sum_i A_i \cdot f'_r(\omega_i) \cdot \left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-b\omega_i} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} e^{-\lambda D_m (t-\omega_i)} \quad (\text{B9})$$

式中: A_i 为求积系数。

因须有 $0 \leq \omega_i \leq t$, 所以有

$$\left(\frac{C_m e^{-bt} + 1}{C_m e^{-b\omega_i} + 1} \right)^{\left(\frac{\lambda}{b} E_m \right)} \in (0,1), e^{-\lambda D_m (t-\omega_i)} \in (0,1) \quad (\text{B10})$$

由此可保证数值积分过程中不出现溢机问题。